Corrigés de la feuille de calcul n°3 — Calculs de limites

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer la limite de (u_n).

1. $u_n = 3n^2 - 7n + 3$ **2.** $u_n = \dfrac{2n^3+7}{5n^3+1}$ **3.** $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

5. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \times \exp(n)$ **6.** $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$ **7.** $u_n = 3^n + \dfrac{1}{2^n}$ **8.** $u_n = 3^n - 2^n$

Solution

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3}{5n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{5}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{5}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+4}^2 - \sqrt{n+1}^2}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{n+4-(n+1)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+4} + \sqrt{n+1} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2} + n\right)}{\sqrt{n^2+2} + n} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+2}^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2} + n} = \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2} + n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n^2+2} + n} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2} + n = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

5. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

6. $u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

7. Comme $3 > 1$ et $2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc, par quotient et somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Or, $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$. De plus, comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 2. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n^2}}{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}^2}}{n}$. Or, $\mathrm{e}^{-u_{n-1}^2} > 0$ et $n > 0$ donc $u_n \geqslant 0$ et, comme $-u_{n-1}^2 \leqslant 0$, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-u_{n-1}{}^2} \leqslant 1$ donc, comme $n > 0$, $u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}}$.
2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$, on déduit de l'inégalité précédente et du théorème d'encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 3. Étudier le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin n$ et $v_n = (-1)^n - n$.

Solution. Pour tout n_inN, $\sin(n) \geqslant -1$ donc $n + \sin(n) \geqslant n - 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leqslant 1$ donc $(-1)^n - n \leqslant 1 - n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 - n = -\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$.

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Justifier que (u_n) est majorée par 2.
3. Conclure que (u_n) est convergente.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».
   Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = \mathrm{e}^0 = 1$ donc $u_1 \geqslant u_0$ et ainsi $P(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc $-u_{n+1} \leqslant -u_n$ donc, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-u_{n+1}} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n}$. Dès lors, $-\mathrm{e}^{-u_{n+1}} \geqslant -\mathrm{e}^{-u_n}$ et donc $2 - \mathrm{e}^{-u_{n+1}} \geqslant 2 - \mathrm{e}^{-u_n}$ i.e. $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   Autrement dit, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
2. D'une part, $u_0 \leqslant 2$. D'autre part, si $n \geqslant 1$ alors $u_n = 2 - \mathrm{e}^{-u_{n-1}}$ donc, comme $\mathrm{e}^{-u_{n-1}} \geqslant 0$, $u_n \leqslant 2$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$ i.e. $\boxed{(u_n) \text{ est majorée par } 2}$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \leqslant 2}$.

Exercice 5. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant n$. (On rappelle que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.)

2. En déduire la limite de (v_n).

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $v_n \geqslant n$ ».

Initialisation. $v_0 = 0 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, $v_n \geqslant n$ donc, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{v_n} \geqslant \mathrm{e}^n$ i.e. $v_{n+1} \geqslant \mathrm{e}^n$. Or, $\mathrm{e}^n \geqslant n+1$ donc $v_{n+1} \geqslant n+1$ et ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant n}$.

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on déduit de l'inégalité précédente et du théorème de comparaison que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple puis la limite des suites suivantes :

a. $u_n = n^2 - n$ **b.** $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ **c.** $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

d. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ **e.** $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$ **f.** $u_n = \dfrac{\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}} - 1}$

g. $u_n = \mathrm{e}^n - n^e$ **h.** $u_n = \sqrt{n} - [\ln(n)]^{\frac{1}{2}} + \sin(n)$ **i.** $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

j. $u_n = \sin\left(\dfrac{3n+4}{(n+1)^2}\right)$ **k.** $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ **l.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Solution.

a. $\boxed{u_n \sim n^2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b. $\dfrac{n+1}{n^2} \sim \dfrac{n}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2} = 0$. Dès lors, $\boxed{u_n \sim \dfrac{n+1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0}$.

c. Pour tout $n > 0$, $u_n = \ln\left(1 + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, comme cos est continue en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = 0$. Ainsi,, $u_n \sim \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{(\frac{1}{n})^2}{2}$ donc $\boxed{u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2n^2} = 0}$.

d. Pour tout $n > 0$, $u_n = \sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} - n = n\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - n = n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - 1 = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et ainsi $\boxed{u_n \sim \dfrac{n}{2n^2} \sim \dfrac{1}{2n}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0}$.

e. Pour tout $n>0$, $u_n=\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+n=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1=2$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\sim 2$ et ainsi $\boxed{u_n\sim 2n}$. Par suite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2n=+\infty}$.

f. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{(\frac{1}{n})^2}{2}\sim\frac{1}{2n^2}$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2}$. Dès lors, $\boxed{u_n\sim\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}\sim\frac{1}{2}}$ et, par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}}$.

g. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\mathrm{e}^n\left(1-\frac{n^e}{\mathrm{e}^n}\right)$. O,r par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^e}{\mathrm{e}^n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\frac{n^e}{e^n}=1$ et ainsi $\boxed{u_n\sim\mathrm{e}^n}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^n=+\infty}$.

h. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sqrt{n}\left[1-\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}+\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right]$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$ donc, par continuité de la fonction racine carrée en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}=0$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-1\leqslant\sin(n)\leqslant 1$ donc $\frac{-1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}+\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}=1$ donc $\boxed{u_n\sim\sqrt{n}}$. Par suite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty}$.

i. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{3^n(\frac{2^n}{3^n}-1)}{3^n(\frac{2^n}{3^n}+1)}=1-\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}+\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\frac{(\frac{2}{3})^n-1}{(\frac{2}{3})^n+1}$. Or, $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ et donc, comme somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$ et $\boxed{u_n\sim 1}$.

j. $\frac{3n+4}{(n+1)^2}\sim\frac{3n}{n^2}\sim\frac{3}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{(n+1)^2}=0$. Ainsi, $\sin\left(\frac{3n+4}{(n+1)^2}\right)\sim\frac{3n+4}{(n+1)^2}\sim\frac{3}{n}$ i.e. $\boxed{u_n\sim\frac{3}{n}}$ et, par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0}$.

k. Pour tout $n>0$, $u_n=\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1=2$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\sim 2$ et ainsi $\boxed{u_n\sim 2\sqrt{n}}$. Par suite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2\sqrt{n}=+\infty}$.

l. Pour tout $n>0$, $u_n=\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2n}$ et ainsi $\boxed{u_n\sim\frac{\sqrt{n}}{2n}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0}$.

Exercice 7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{5u_n-2}{u_n+2}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique.

3. En déduire le terme général de (u_n) ainsi que sa limite.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n \neq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 0 \neq 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, $u_n \neq 1$. Supposons par l'absurde que $u_{n+1} = 1$. Alors, $\dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} = 1$ donc $5u_n - 2 = u_n + 2$ i.e. $4u_n = 4$ et donc $u_n = 1$. C'est absurde puisque, par hypothèse, $u_n \neq 1$. Ainsi, $u_{n+1} \neq 1$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5u_n-2}{u_n+2} - 2}{\frac{5u_n-2}{u_n+2} - 1} = \frac{\frac{5u_n-2-2(u_n+2)}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-(u_n+2)}{u_n+2}} \\
&= \frac{5u_n - 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{5u_n - 2 - u_n - 2} \\
&= \frac{3u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{3(u_n - 2)}{4(u_n - 1)} \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{3}{4} v_n
\end{aligned}$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{3}{4}}$.

3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Or, $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ donc $v_n(u_n - 1) = u_n - 2$ donc $v_n u_n - v_n = u_n - 2$ donc $v_n u_n - u_n = v_n - 2$ donc $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n - 1 = 0$ alors, d'une part $v_n = 1$ et, d'autre part, $v_n - 2 = u_n(v_n - 1) = 0$ donc $v_n = 2$, ce qui est contradictoire. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 1 \neq 0$ donc $u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}}$. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ donc, par sommes et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$.